Geometría

1) (Junio-96) Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, calcular la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(Sol: -13)

2) (Junio-96) Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser ciertas, justifíquense; en caso contrario, póngase ejemplos que lo confirmen:

a) El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos es siempre distinto de cero.

b) Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores del espacio tridimensional $\Re^3$ no nulos que satisfacen la condición $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, entonces se verifica que $\vec{b} = \vec{c}$.

(Sol: Falsas ambas)

3) (Junio-96) Sea *ABC* un triángulo isósceles, cuyo ángulo desigual es *A*. Hallar el coseno del ángulo *A* sabiendo que las medianas trazadas desde los vértices *B* y *C* son recíprocamente perpendiculares.

(Sugerencia: Tomar ejes coordenados XOY haciendo que el eje OX coincida con BC y que el eje OY coincida con la altura desde el vértice A a BC)

(Sol: $\cos A = \frac{4}{5}$ **)**

4) (Sept-96) ¿Es siempre cierto que $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (el "$\times$" representa el producto vectorial) ? En caso afirmativo, justifíquese. En caso contrario, póngase un ejemplo que lo confirme.

(Sol: Cierto)

5) (Junio-97) Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando las respuestas:

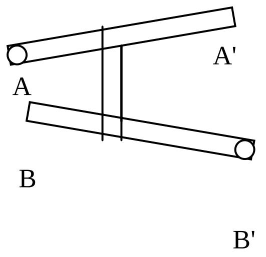
1ª. Si los puntos *A, B, C* y *D* pertenecen a un mismo plano, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes.

2º. Sean $(A, \vec{v})$ y $(A', \vec{v}')$ las determinaciones lineales de dos rectas r y r'. Si los vectores $\overrightarrow{AA'}, \vec{v},$ y $\vec{v}'$ son linealmente dependientes, entonces las rectas r y r' son coplanarias.

(Sol: 1º) Falso; 2º) Cierto)

6) (Junio-97) Dos varillas *AA'* y *BB'*, de espesor despreciable, están entrelazadas por una goma elástica (del modo en que se indica en la figura adjunta).

La goma, que está tensa, puede deslizar libremente por las varillas (sin rozamiento). Se sabe que las varillas ocupan las posiciones (en ejes cartesianos rectangulares *xyz*):



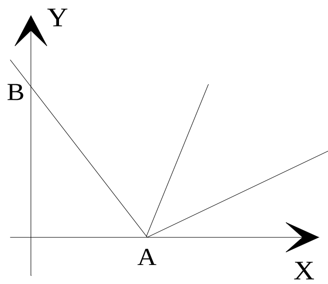
$$AA' = \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \qquad BB' = \begin{cases} x-y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

1º. ¿Qué posiciones relativas tienen las rectas *AA'* y *BB'*?

2º. Hallar la longitud total de la goma elástica en su posición de equilibrio.

(Sol: 1º) Se cruzan ; 2º) d = 3)

7) (Sept-97) Los rayos del Sol descienden según la dirección y el sentido del vector (-5, -1), en el plano XOY. En el punto A(1,0) se sitúa un pequeño espejo plano de manera que el rayo de Sol que llega a A, tras reflejarse en el espejo, pasa por el punto B (0,3). Hallar la ecuación de la recta sobre la que se asienta el espejo.



(Sol: $y = \frac{5\sqrt{10}-\sqrt{26}}{3\sqrt{26}+\sqrt{10}}(x-1)$ **)**

8) (Junio-98) a) Comprobar que los vectores $\vec{a} = (1,1,3)$ $\vec{b} = (-1,2,0)$ $\vec{c} = (1,3,5)$ son linealmente dependientes.

b) Encontrar la ecuación del plano π determinado por el punto $Q(-1,0,1)$ y los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

(Sol: b) $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$ **)**

9) (Junio-98) Encontrar los vectores unitarios de $\Re^3$ que son perpendiculares a $\vec{v} = (1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(Sol: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **)**

10) (Sept-98) a) Hallar un punto *A* que está sobre la recta $y = 1 + x, z = 1 + 2x$, que diste del punto $B(1,0,1)$ doble que del punto $C(0,0,0)$ y que está por debajo del plano *XY*.

b) Hallar la proyección ortogonal de *C* sobre la recta *BP*, donde *P* es el punto en el que la recta dada en el apartado anterior corta al plano *YZ*.

(Sol:a) $A(-1,0,-1)$ **; b)** $C'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ **)**

11) (Sept-98) Determinar, en función de los distintos valores de λ, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y + \lambda z = 1 \quad \pi_2 \equiv x + \lambda y = 1 \quad \pi_3 \equiv \lambda x + y + z = 1$$

(Sol: Si $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ se cortan en un punto; b) Si $\lambda = 1$ se cortan en una recta; c) Si $\lambda = -2$ se cortan dos a dos.)

12) (Junio-99) a) Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

(Sol: a) Dos planos, $\pi_1 \equiv x + 2y + 5z + 30 = 0$; $\pi_2 \equiv 19x - 22y + 5z + 60 = 0$ b) $(0,-15,0)$; $\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$)

13) (Junio-99) Dados los puntos $A(1,-3,1)$, $B(2,3,1)$ y $C(1,3,-1)$, se pide:

a) Obtener la ecuación del plano π que los contiene.

b) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π.

c) Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y el origen de coordenadas.

(Sol: a) $\pi \equiv 6x - y - 3z - 6 = 0$; b) $d = \frac{3\sqrt{46}}{23}$; c) V = 2)

14) (Junio-99) Sean A, B y C los puntos de la recta $x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ que están en los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente.

a) Determinar razonadamente cual de los tres puntos se encuentra entre los otros dos.

b) Siendo *D* un punto exterior a la recta, indicar, razonadamente, cuál de los triángulos *DAB*, *DAC* o *DBC* tiene mayor área.

(Sol: a) *C* está entre *A* y *B*; b) Triángulo *DAB*)

15) (Sept-99) Sean la recta r y el plano π dados por

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z + 1 = 0$$

a) Calcular el seno del ángulo que forman la recta r y el plano π.

b) Hallar la ecuación de la recta proyección ortogonal de r sobre π.

(Sol: a) $\frac{\sqrt{21}}{14}$; b) $\frac{x+\frac{4}{3}}{4} = \frac{y+\frac{1}{3}}{1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{-5}$)

16) (Junio-00) Resolver la siguiente ecuación vectorial $\vec{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$, sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$

(Sol: (1,-2,1) ; (5/3,-5/3,2/3))

17) (Junio-00) Sean los puntos $P(8,13,8)$ y $Q(-4,-11,-8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) Obtener la ecuación del plano π

b) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0,0,0)$ sobre π

c) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

(Sol: a) $3x+6y+4z-12=0$ **; b)** $\left(\frac{36}{61},\frac{72}{61},\frac{48}{61}\right)$ **c) 4)**

18) (Sept-00) Se consideran los puntos $A(1,\lambda,0)$, $B(1,1,\lambda-2)$ y $C(1,-1,\lambda)$

a) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro λ

b) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos

(Sol: Area = 1)

19) (Sept-00) Sean la recta $r\equiv\frac{x-1}{m}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi\equiv 2x-y+kz=0$

a) Calcular *m* y *k* para que la recta sea perpendicular al plano.

b) Calcular *m* y *k* para que la recta esté contenida en el plano.

(Sol: a) $m=-8, k=-1/2$ **; b)** $m=4, k=-2$ **)**

20) (Junio-01) Dados el plano $\pi\equiv x+y+z=1$, la recta $r\equiv(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda\,(0,1,1)$, y el punto $P(1,1,0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación de una recta *s* que sea perpendicular a *r* y pase por *P*.

b) Hallar el punto *P'*, simétrico de *P* respecto de *r*.

c) Hallar el punto *P''*, simétrico de *P* respecto de π.

(Sol: a) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ **; b)** $P'(1,0,1)$ **; c)** $P''\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ **)**

21) (Junio-01) Sean las rectas $r\equiv x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{z+1}{-2}$ $\quad s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$

a) Hallar *k* para que *r* y *s* sean coplanarias.

b) Para el valor anterior de *k*, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) Para el valor anterior de *k*, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

(Sol: a) $k=-1$**; b)** $\pi\equiv x+y-3=0$ **; c)** $\frac{x-5/4}{1}=\frac{y-7/4}{1}=\frac{z-1/2}{0}$ **)**

22) (Sept-01) Sean *A*, *B* y *C* tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación: $\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}$

a) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$

b) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

(Sol: a) $k=1/4$ **; b)** $C\left(\frac{2}{3},3,\frac{3}{2}\right)$ **)**

23) (Sept-01) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

a) Hallar el área del triángulo *ABC* y el volumen del tetraedro *ABCD*.

b) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos *A*, *B* y *C*.

c) Hallar la distancia entre las rectas *AC* y *BD*.

(Sol: a) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ **; b)** $\frac{7\sqrt{19}}{19}$ **; c)** $\frac{7\sqrt{41}}{41}$ **)**

24) (Junio-02) Hallar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x=1+t \quad ; \quad y=-1+2t \quad ; \quad z=t$$

y es perpendicular al plano $\pi: \ 2x+y-z=2$

(Sol: $x-y+z-2=0$ **)**

25) (Junio-02) Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

a) Hallar las coordenadas del cuarto vértice *D* y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) Clasificar el paralelogramo por sus lados y sus ángulos.

(Sol: a) D(0,2,2) ; b) Rombo)

26) (Sept-02) Se consideran las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a) Calcular la distancia entre *r* y *s*.

b) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a *r* y *s* y que corta a ambas.

c) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a *r* y *s* y que pasa por el punto P(1,0,0).

(Sol: a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **; b)** $\frac{x+\frac{5}{14}}{0}=\frac{y-\frac{12}{7}}{1}=\frac{z-\frac{16}{7}}{1}$ **; c)** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$ **)**

27) (Sept-02) Para cada valor del parámetro real *a*, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x+y+az=-2 \quad ; \quad \pi_2 \equiv x+ay+z=-1 \quad ; \quad \pi_3 \equiv ax+y+z=3$$

Se pide:

a) Calcular los valores de *a* para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) Para los valores de *a* calculados, hallar una ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

(Sol: a) $a=-2$ **; b)** $\begin{cases} x+y-2z=-2 \\ -3y+3z=1 \end{cases}$ **)**

28) (Junio-03) Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) Hallar la distancia entre las dos rectas

b) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a *r* y *s*

(Sol: a) $\frac{11\sqrt{26}}{13}$ **; b)** $\frac{x-\frac{14}{13}}{-3} = \frac{y-\frac{21}{13}}{-4} = \frac{z-\frac{4}{13}}{1}$ **)**

29) (Junio-03) Dados el plano $\pi \equiv x+3y-z=1$ y la recta $r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π , π'

(Sol: a) $5x-7y-16z+17=0$ **; b)** $\begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ **)**

30) (Sept-03) Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x-2y-z-7=0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos *A* y *B*.

(Sol: $2x+y-2=0$ **)**

31) (Sept-03) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$

a) Hallar el valor de *k* para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de *k* obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

(Sol: a) $k=4$ **; b)** $x+2y-z+5=0$ **)**

32) (Sept-03) Dados el plano $\pi \equiv x+y+z=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Calcular el punto *Q* en el que se cortan el plano π y la recta *r*.

b) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto *Q'* en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto *Q* hallado en el apartado anterior.

(Sol: a) $Q=(1,0,-1)$ **; b)** $3x+3y+3z+10=0$ **)**

33) (Junio-04) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2-3x+2y-z=0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 3+2x+2y-2z=0$$

a) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) Calcular la distancia de r a π_2

(Sol: a) $r \cap \pi_1$ **= un punto ;** $r \cap \pi_2$ **= recta ; b) Se cortan en una recta ; c)** $d = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **)**

34) (Junio-04) a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k: $\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$; $\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$; $\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$

b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

(Sol: a) Si $k \neq 1/3, k \neq -2$ **se cortan en un punto ; Si** $k = -2$ **se cortan en una recta ; Si** $k = 1/3$ **los dos últimos paralelos y el primero corta a ambos**

35) (Sept-04) Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$

a) Hallar el punto simétrico del (0,0,0) respecto de π .

b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.

c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de r con los ejes coordenados.

(Sol: a) O'(6/7,12/7,18/7) ; b) $\pi' \equiv 2x - y = 0$ **c)** $V = 6$ **)**

36) (Sept-04) a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

b) Describir dicho conjunto.

(Sol: a) Rectas $r: \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **;** $s: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **; b)** $\{(x, y, z) \in R^3 | \ (x, y, z) \in r \ ó \ s\}$

37) (Sept-04) El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

(Sol: a) $a = \frac{2}{3}$ **; b)** $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **; c)** $S = \frac{3}{2}$ **)**

38) (Junio-05) Dado el punto P(1,3,-1), se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) Calcular los puntos de la recta: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$ cuya distancia a P es igual a 3.

(Sol: a) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ **b) P_1(0,1,1) , P_2(3,2,-3))**

39) (Junio-05) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \qquad s \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) Calcular la mínima distancia entre *r* y *s*.

(Sol: a) $\begin{cases} 3x-10y+6z+1=0 \\ x+5y+2z-9=0 \end{cases}$ **; b)** $d=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **)**

40) (Sept-05) Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x+z=\lambda$$
$$\pi_2 : 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2$$
$$\pi_3 : 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda$$

(Sol: Si $\lambda \neq 2, \lambda \neq -8/3$ **se cortan en un punto ; Si** $\lambda=2$, $\pi_1 \| \pi_2$ **y** π_3 **los corta ; Si** $\lambda=-8/3$, $\pi_1 \| \pi_3$ **y** π_2 **los corta)**

41) (Sept-05) Se consideran las rectas: $r : \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

a) Hallar la recta *t*, perpendicular a *r* y *s*, que pasa por el origen.

b) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta *s* con la recta *t* obtenida en el apartado a)

(Sol: a) $\frac{x}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ **b) P(3,.-1,-1))**

42) (Sept-05) Se considera la familia de planos: $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$, siendo *m* un parámetro real. Se pide:

a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto P(1,1,0)

c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta $r : \begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$

(Sol: a) $\begin{cases} -2x+3z+1=0 \\ x+y+3z+1=0 \end{cases}$ **; b)** $x+7y-6z-2=0$ **c)** $x+13y-15z+5=0$**)**

43) (Junio-06) Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Hallar la ecuación de la recta *t* que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Hallar la recta perpendicular común a las rectas *r* y *s*.

(Sol: a) $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases}$ **)**

44) (Junio-06) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v}=(4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi: z=0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

(Sol: $P_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $P_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$**)**

45) (Junio-06) Determinar la posición relativa de las rectas :

$$r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s: \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

(Sol: Paralelas)

46) (Sept-06) Se consideran los puntos A(0,1,0) y B(1,0,1). Se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de *A* y *B*.

b) Determinar la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a *A* es igual a la distancia de *A* a *B*

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo *ABC* es rectángulo con el ángulo recto en el vértice *A*.

(Sol: a) $x-y=0$ **; b)** $x^2+(y-1)^2+z^2=3$ **; c)** $r: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$ **)**

47) (Sept-06) Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$.

Se pide:

a) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro *OABC* (donde *O* es el origen), sea 2

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro *OABC* correspondiente al vértice *O*.

(Sol: a) $\lambda=3$ **; b) 12/13)**

48) (Junio-07) Dados el punto A(1,-2,-3), la recta $r:\begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y-3z+1=0$,

se pide:

a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a *r* y perpendicular a π.

b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a *r* y es paralela a π.

(Sol: a) $3x+3y-z=0$ **; b) s:** $\frac{x-4}{1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{1}$ **)**

49) (Junio-07) Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$, $C(\lambda,0,\lambda+2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para que los puntos *A*, *B* y *C* estén alineados?

b) Comprobar que si *A*, *B* y *C* no estén alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo *ABC* para el valor $\lambda=0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

(Sol: a) No; c) $x+y+z-2=0$ **,** $d=2/\sqrt{3}$ **)**

50) (Sept-07) Hallar los puntos de la recta $r:\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano de ecuación $\pi \equiv 2x-y+2z+1=0$ es igual a 1.

(Sol: P(0,2,2); P(6,8,-4))

51) (Sept-07) Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $s:\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto P(2,-1,2) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

(Sol: $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$ **)**

52) (Sept-07) Sean las rectas $r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ $s:\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta *s*.

(Sol: a) $\pi:3x-5y-4z+13=0$ **; b) 4/5)**

53) (Junio-08) Dadas las rectas: $r:\begin{cases} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{cases}$ $s:\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$

a) Discutir la posición relativa de las dos rectas *r*, *s* según los valores del parámetro *a*.

b) Si $a=1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas *r*, *s*.

(Sol: a) Si $a\neq 0$, **se cruzan; Si** $a=0$, **se cortan ; b)** $d=\sqrt{2}$

54) (Junio-08) Dados los puntos A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,2) y D(1,2,0), se pide:

a) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) Hallar la distancia del punto D al plano π.

(Sol: b) $2x+3y+z-1=0$ **; c)** $d=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

55) (Junio-08) Dados el plano $\pi \equiv 3x+2y-z+10=0$ y el punto P(1,2,3), se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Hallar el punto Q intersección de π y r.

c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) Hallar el área del triángulo PQR.

(Sol: a) $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ **; b)** $Q=(-2,0,4)$ **c)** $R=(0,-5,0)$ **; d)** $S=\dfrac{\sqrt{566}}{2}$

56) (Sept-08) Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:

a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $dist(P,S)=2\cdot dist(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

(Sol: a) Plano $x+3z-5=0$ **; b)** $S_1(-1,1,3)$ **,** $S_2(1/3,1,1)$ **)**

57) (Sept-08) Dadas las rectas: $r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$, $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4}$

Hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

(Sol: $t:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+10}{2}=\dfrac{z}{-1}$ **)**

58) (Sept-08) Dados el plano $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-4}$, se pide:

a) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1

b) Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

(Sol: a) $P=(3,2,-4)$ **; b) Planos** $\left\langle \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=2 \end{array} \right.$ **)**

59) (Junio-09) Dado el plano $\pi \equiv x+3y+z=4$, se pide:

a) Calcular el punto simétrico P del punto O(0,0,0) respecto del plano π

b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x=0$

c) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$

(Sol: a) $P\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)$ **; b)** $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{11}}{11}$ **; c)** $V=\frac{32}{9}$ **)**

60) (Junio-09) Dadas las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$; $s:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s

b) Determinar la distancia entre las rectas r y s

c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por O(0,0,0) corta a la recta s

(Sol: a) $x-2z-1=0$ **; b)** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ **; c) No se cortan)**

61) (Sept-09) Dadas las rectas: $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$, $s\equiv\frac{x-3}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}$, determinar los valores de *a* y *b* para los cuales las rectas *r* y *s* se cortan perpendicularmente.

(Sol: $a=1$ **y** $b=-1$**)**

62) (Sept-09) Dado el plano $\pi\equiv 2x-y+2z+1=0$, hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π

(Sol: $\pi_1\equiv 2x-y+2z+10=0$ **;** $\pi_2\equiv 2x-y+2z-8=0$**)**

63) (Sept-09) Dada la recta : $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi\equiv x+y-2z+1=0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

(Sol: $r'\equiv\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$**)**

64) (Junio-10 –Fase General) Dadas las rectas : $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-1}$, $s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$, se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a *r* y *s*.

b) Calcular la mínima distancia entre las rectas *r* y *s*.

(Sol: a) $t\equiv\begin{cases}12x+11y+57z+217=0\\35x+53y-22z=0\end{cases}$ **; b)** $\sqrt{251}$ **)**

65) (Junio-10 –Fase General) Dadas las rectas : $r\equiv x=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$, $s:\begin{cases}x+z=3\\2x-y=2\end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π determinado por *r* y *s*.

b) Hallar la distancia desde el punto A(0,-1,-1) a la recta *s*

(Sol: a) $\pi \equiv 5x - 4y - 3z + 1 = 0$ **; b)** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **)**

66) (Junio-10 –Fase General) Sea π el plano que contiene a los puntos $P = (1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ y $R(0,0,3)$. Se pide:

a) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos *P*, *Q* y *R*.

b) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π

(Sol: a) Vol = 1 ; b) $O' = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$ **)**

67) (Junio-10 –Fase Específica) Dada la recta : $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el punto $P = (2,0,-1)$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta *r*.

b) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta *r*.

(Sol: a) $\frac{\sqrt{413}}{7}$ **; b)** $P' = \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$ **)**

68) (Junio-10–Fase Específica) Dado el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ la recta : $r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$, se pide:

a) Calcular los valores de *a* para los que la recta *r* está contenida en el plano π.

b) Para el valor $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{11}{2}\right)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

c) Para $a = -2$, hallar el seno del ángulo que forman *r* y π.

(Sol: a) $a = -11$ **; b)** $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$ **; c) 42º 7')**

69) (Sept-10–Fase General) Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$; $r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2

(Sol: a) $t \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ **; b)** $\sqrt{2}$ **)**

70) (Sept-10–Fase General) Dadas el plano $\pi_1 \equiv 2x-3y+z=a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $\vec{v}_1=(0,2,6)$ y $\vec{v}_2=(1,0,b)$ se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Para $a=1$ y $b=0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) Para $a=4$ y $b=-2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

(Sol: a) $a\neq-2$ **,** $b=-2$ **; b)** $t:\begin{cases}x=3/2\\ y=\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}$ **; c)** $\pi\equiv 2x-3y+z-1=0$

71) (Sept-10–Fase Específica) Se consideran las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\\ z=3-\lambda\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x+2y-z=-1\\ x+y=-2\end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta *t* que pasa por el punto $P(0,1,-2)$ y corta a las rectas *r* y *s*

(Sol: $t\equiv\begin{cases}x-6y+z+8=0\\ 2x-y+3z+7=0\end{cases}$ **)**

72) (Sept-10–Fase Específica) Dadas las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y-z=-2\\ x-2y=-1\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{2}$$

a) Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(a,3,-3)$, determinar el valor de *a* para que la recta t que pasa por los puntos *A* y *B*, sea paralela a la recta *s*.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a *s*

(Sol: a) $a=0$ **; b)** $\pi\equiv 17x+y-7z+17=0$ **)**

73) (Sept-10–Fase Específica) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $\pi_1\equiv 5x-y-7z=1$ y $\pi_2\equiv 2x+3y+z=5$

(Sol: $\pi\equiv 20x-19y+17z=0$ **)**

74) (Junio-11) a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1\equiv x=y=z\ ;\ r_2\equiv\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\ ;\ r_3\equiv\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\quad \text{con el plano } \pi\equiv 2x+3y+7z=24$$

b) Hallar la recta *s* que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r_4\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-2}\quad ,\quad r_5\equiv\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$$

(Sol: a) Vol = 32 ; b) $t \equiv \begin{cases} 8x+7y+11z-16=0 \\ 3x+y+9z-8=0 \end{cases}$ **)**

75) (Junio-11) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-2z=1$, $\pi_2 \equiv x-y+2z=1$

a) Estudiar su posición relativa.

b) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

(Sol: a) Se cortan en una recta ; b) $\vec{v}(0,-2,-1)$ **,** $P(2/3,-1/3,0)$ **)**

76) (Sept-11) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$; $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$

y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z+1}{2}$. Se pide:

a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2

b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados *XY*, *XZ* e *YZ*

c) La proyección ortogonal de *r* sobre el plano π_2

(Sol: a) $P(3,0,0)$ *y* $P(1/2,-5/4,-5/2)$ **; b) Vol = 1/6 ; c)** $t \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ **)**

77) (Sept-11) Dado el punto P(0,1,1) y las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$; $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de *r*

b) Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a *s*

(Sol: a) $P'(4/3,-10/3,-2/3)$ **; b)** $\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ **)**

78) (Junio-12) Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) Hallar el valor de *a* para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) Hallar los valores de *a* para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7

c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y P_3

(Sol: a) a = 4/3 ; b) a = 10/3, a = -2/3 ; c) $4x+10y-31=0$ **)**

79) (Junio-12) Dadas las rectas $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=5 \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2

(Sol: a) Se cruzan ; b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ **)**

80) (Sept-12) Se dan la recta r y el plano π, mediante:

$$r_1 \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3} \quad , \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano es igual a uno.

(Sol: $P(2/3, 8/3, -3)$, $P(14/3, 2/3, 3)$ **)**

81) (Sept-12) Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$; $s \equiv \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

(Sol: a) $3x - y + 2z - 11 = 0$ **; b)** $t: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ **)**

82) (Sept-12) Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) Hallar el punto *P'* simétrico de *P* respecto del punto $Q(3,0,2)$

b) Hallar el punto *P''* simétrico de *P* respecto de la recta $r: x - 1 = y - 1 = z$

c) Hallar el punto *P'''* simétrico de *P* respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$

(Sol: $P'(4, -1, 5)$ **) ; b)** $P''(0, 1, 1)$ **; c)** $P'''(8/3, 5/3, -1/3)$ **)**

83) (Junio-13) Dado el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$

a) Determinar la posición relativa de *r* y *s*

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a *r* y *s*

c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a *r* y *s*

(Sol: a) Se cruzan**; b)** $\begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ **)**

84) (Junio-13) a) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$ con la superficie esférica de de centro $C(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$

b) Hallar la distancia del punto $Q(-2,1,0)$ a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-3}{2}$

(Sol: a) $P(10/3, 17/3, 5/3)$ y $Q(-4, 2, -2)$ **; b)** $3\sqrt{2}$ **)**

85) (Junio-13) Dados el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\pi \equiv 2x+y-1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$

Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por *P*, es paralelo a la recta *r* y perpendicular al plano π

b) Hallar el ángulo entre *r* y π

(Sol: a) $x+y-z-2=0$ **; b)** $\alpha = arcsen\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$ **)**

86) (Sept-13) Dados los puntos $A(2,-2,1), B(0,1,-2), C(-2,0,-4), D(2,-6,2)$, se pide:

a) Probar que el cuadrilátero *ABCD* es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los lados paralelos.

b) Hallar el área del triángulo *ABC*.

(Sol: a) $d=\sqrt{\dfrac{149}{22}}$ **; b)** $S=\dfrac{\sqrt{149}}{2}$ **)**

87) (Sept-13) Dados el punto $P(1,2,-1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea *S* la esfera que es tangente al plano π en un punto *P'* de modo que el segmento *PP'* es uno de sus diámetros. Se pide:

a) Hallar el punto de tangencia *P'*.

b) Hallar la ecuación de *S*.

(Sol: a) $P'(0,0,1)$ **; b)** $S:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{9}{4}$ **)**

88) (Sept-13) Sea r_A la recta con vector director $(1,\lambda,2)$ que pasa por el punto $A(1,2,1)$, r_B la recta con vector director $(1,1,1)$ que pasa por $B(1,-2,3)$ y r_C la recta con vector director $(1,1,-2)$ que pasa por $C(1,1,-3)$. Se pide:

a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C

c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

(Sol: a) $\lambda=-1$ **; b)** $\lambda=1$ **; c)** $\alpha=90^{o}$ **)**

89) (Junio-14) Dados el punto P(1,0,1), el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular el punto P' simétrico de P respecto de r

b) Hallar la distancia de P a r.

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas O(0,0,0) y las intersecciones del plano π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

(Sol: a) $P'\left(\frac{17}{31},\frac{30}{31},-\frac{5}{31}\right)$ **; b)** $\sqrt{2}$ **; c) 1/180)**

90) (Junio-14) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Determinar la recta que pasa por A(-2,1,0), corta a r, y es paralela a π

(Sol: a) Se cortan en el punto (1,0,-1) ; b) $x + 2y - 4x - 5 = 0$ **; c)** $\sqrt{2}$ **; c)** $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{5/2}$ **)**

91) (Sept-14) Dados los puntos y la recta $A(2,0,-2), B(3,-4,-1), C(5,4,-3)$ y $A(0,1,4)$, se pide:

a) Calcular el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

b) Calcular el volumen del tetraedro *ABCD*

(Sol: a) $2\sqrt{17}$ **; b) 50/3)**

92) (Sept-14) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0,\quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0,\quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$, se pide:

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2

b) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3

(Sol: a) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases}$ **; b)** $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ **)**

93) (Sept-14) Dado el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y π

b) Calcular la distancia entre r y π

c) Obtener el punto P' simétrico de $P(3,2,1)$ respecto del plano π

(Sol: a) Son paralelos; b) 5/3 ; c) P'(-1,4,3))

94) (Junio-15) a) Dados los vectores $\vec{u} = (2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,-1,-1)$ y $\vec{w} = (-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

b) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$

(Sol: a) $\lambda = 0, \lambda = -6$ **; b)** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$ **)**

95) (Junio-15) Dado el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

(Sol: $x-2y+2z-12=0$ **;** $x-2y+2z+6=0$ **)**

96) (Junio-15) Dado el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=-4+4\lambda \\ y=8+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$ se pide:

a) Encontrar un punto *Q* de la recta *r*, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) Determinar la distancia de *P* a *r*.

c) ¿Existe algún punto *R* de la recta *r*, de modo que los puntos *O*, *P* y *R* estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia

(Sol: a) P(4,14,-4); b) $\frac{2\sqrt{6061}}{29}$ **; c) No existe)**

97) (Sept-15) La recta *r* pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director ; la recta *s* pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$

a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre *r* y *s* sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$

b) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q

(Sol: a) $\lambda=3$ **; b)** $\lambda=-1$ **)**

98) (Sept-15) Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos:

$$\pi_1 \equiv x-z=0, \quad \pi_2 \equiv my-6z=0, \quad \pi_3 \equiv x+y-mz=0,$$

a) Calcular los valores de m para que los tres planos se corten en una recta

b) Para $m=3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2

c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P´, siendo P´ el punto simétrico de P respecto al plano π_1

(Sol: a) $m=3, m=-2$ **; b)** $x+2y+z+2=0$ **; c)** $\sqrt{10}$ **)**